２０２０年２月１４日

「博士学位請求論文」審査報告書

審査委員　（主査）　理工学部　専任教授
氏名　中　村　　幸　男　㊞

（副査）　理工学部　専任教授
氏名　対　馬　　龍　司　㊞

（副査）　理工学部　専任教授
氏名　藏　野　　和　彦　㊞

１　論文提出者　　嶋田　芳

２　論文題名　　The dimension of categories of modules

（和文題）　加群圏の次元について

３　論文の構成

本論文の構成は下記のとおりであり，本文は 5 章からなる。

Introduction
1. The dimension of a subcategories of modules
2. Cohen-Macaulay local rings of dimension one
3. Extension of matrix factorizations
4. Hypersurfaces
5. Totally reflexive modules

４　論文の概要

本研究は代数学の中でも，可換環の表現論という分野に属するものである。表現論という言葉が意味する内容は，種々の分野で多少意味合いが変わってくるが，環の表現論とは，与えられた環に対し，その環上の加群全体（これを加群圏と呼ぶ）がどのような構造を持つかを調査する分野で，特に可換環の場合を研究対象とする。加群圏の構造を調べるとは，直既約加群（それ以上直和分解できない加群）の分布を調べることであり，直既約加群を結ぶ準同型写像がどのくらい存在するかを調べることである。与えられた可換環に対し，その環上の直既約加群は有限個となるか？直既約加群の間の写像はどのくらい存在するか？あるいは直既約加群が有限個となるよ

うな環はどんなものか？などといった問題を研究する分野である。

簡単な例をひとつ挙げると，可換環として体 K を取った場合を考える。K 上の加群を考えるということは K 上のベクトル空間を考えることであり，ベクトル空間には基底が存在することから，すべての加群は体 K の直和で与えられる。またベクトル空間の間の線形写像は行列で与えられることから，すべての準同型写像は K の元の定数倍写像で決定しているといえる。このようにして，ベクトル空間のなす圏の構造を掴むことができる。

ベクトル空間のなす圏からやや対象を一般化して，直既約加群の同型類が有限個からなる加群圏（有限表現型）の研究が、1970 年代に Auslander と Reiten を中心に展開された。彼らは非可換な Artin 環上で有限表現型の加群圏の理論を構築していった。これを可換環上で展開するときは，可換 Noether 局所環上の極大 Cohen-Macaulay 加群圏（CM 加群圏）の構造を調査することが対応しており，1980 年代後半に Buchweitz, Greuel, Schreyer，吉野雄二らによってその理論が進められていった。CM 加群圏の研究は，まず直既約極大 Cohen-Macaulay 加群が有限個となる環（有限 CM 表現型）の調査，あるいは直既約極大 Cohen-Macaulay 加群が可算無限個となる環（可算 CM 表現型）についての研究から進められていった。特に代数幾何学との関連も指摘され，2 次元超曲面では有限 CM 表現型となる環は有理 2 重点となり，クイバーが ADE 特異点のディンキン図形に対応していることが判明されていった。

時代がやや下がり，2008 年になると Rouquier が三角圏の次元というものを定義する。これは一つの対象から有限個の直和・直和因子・シフトを除き何回の三角系列による拡大を行うことで，圏を構築できるかで定まる数である。その後 2014 年 Dao-Takahashi によって三角圏の次元の類似として加群圏の次元が定義され，CM 加群圏の次元が研究対象となる。有限 CM 表現型の環は，その CM 加群圏の次元がゼロとなることと同値であることは，加群圏の次元の定義から従うことなのだが，その後，可算無限 CM 表現型の環が，その CM 加群圏の次元が 1 となることと同値であることが判明する。嶋田氏がこの研究を始めた当初は，次に調査すべき問題として，非可算無限 CM 表現型の環について CM 加群圏の次元はどうなるか？また、CM 加群圏の次元が 2 以上となる環はどんなものか？という問題が提起されていた。

以下，本論文の構成について述べる。本論文は 5 つの章によって構成されている。

第 1 章は，加群圏の次元を議論するために必要な用語を準備したものである。加群圏の次元を定義するための重要な概念として，白丸演算「 ◦ 」と黒丸演算「 · 」とがある。ともに結合法則を満たす演算子となるが，本質的なことであるので本章ではその証明をつけている。証明にはファイバー積が使われるところが面白い。その他，シジジー，及びコシジジーなる概念の説明。次元の相似的概念である「加群圏の半径」についての準備を行った。また，本稿で主として扱われる加群圏である Cohen-Macaulay 加群圏 CM(R) と全反射加群圏 G(R) について，基本的な性質をまとめている。

第 2 章は，1 次元 Cohen-Macaulay 局所環上での CM 加群圏の次元について調べた結果であり，2 つの主定理を与えている。なお，本章の結果は，首都大学東京の川崎健氏、及び明治大学の中村幸男との 3 人の共同研究によるものである。本章一つ目の結果では，1 次元の超曲面環 R に対して CM(R) の次元の上限を best possible の形で与えた。超曲面環は正則局所環上一つの定義方程式で定まる環で Cohen-Macaulay 環の特殊な場合である。超曲面環に対しての主定理から得られる系として，R の定義方程式 f の素元分解が $f = f_1 \dots f_s$ で与えられたとき，各 CM

加群圏 $CM(R(f_i))$ の次元がゼロならば，CM(R) の次元が 1 以下になることが従う。この系の帰結として，超曲面環 $R=k[[x,y]]/(x^n)$ の CM(R) の値が 任意の $n\geq 2$ に対して 1 以下となることが示される。先行結果によって，この環 R は n = 1 のときは有限 CM 表現型で dim CM(R) = 0 となること，n = 2 のときは可算 CM 表現型で dim CM(R) = 1 となること，及び $n\geq 3$ のときは非可算 CM 表現型であることが分かっていたので，このときは CM(R) の次元も 2 以上になるであろうと予想されていたのだが，この結果から予想は否定される。この事実は関係者の間に驚きを与え，表現型の種類と次元の関係には何か別の要因があることが判明するに至る。本章のもう一つの定理は一般の 1 次元 Cohen-Macaulay 局所環での CM 加群圏の次元の上限を次の形で与えた。

$$\dim CM(R) \quad \leq \quad \sum_{P\ \in Ass\ R} \ell\ell(R_P) - 1$$

ここで $\ell\ell(R_P)$ は局所環に対する不変量であり loewy 数と呼ばれる。この評価式によって，具体的な多くの 1 次元 Cohen-Macaulay 局所環 R に対する CM(R)の次元が評価できることとなったが、その精度のほうはまだまだ改良の余地が残るものである。

第 3 章では 2 章の扱った 1 次元超曲面環における結果を劇的に改良した。本章の結果は名古屋大学の高橋亮氏との共同研究である。超曲面環 R の定義方程式を f とし，f の因数分解を $f=f_1\dots f_s$ としたとき，CM(R) の次元の評価式を次の形で与えた。

$$\dim CM(R) \quad \leq \quad \max\{\dim CM(R/(f_i)) \quad | \quad 1\leq i\leq s\ \}+1$$

この改良により，1 次元超曲面環 R で，CM(R) の次元が 1 となる環の定義方程式の形が決定するに至る。

第 4 章では，一般次元の超曲面環 R に対して CM(R)の次元の評価を行った。これも超曲面環の定義方程式 f が因数分解 $f=f_1\dots f_s$ を持つときに，$CM(R/(f_i))$ の次元で CM(R) を評価しようというものである。主定理は次の形で与えられる。R が 定義方程式 f をもつ d 次元超曲面環で f が $f=f_1\dots f_s$ という因数分解を持つとき，$d\geq 2$ ならば

$$\dim CM(R) \quad \leq \sum_{i=1}^{s} \dim CM(R/(f_i)) + sd - 2$$

となる。先行結果として，Dugas-Leuschke が高次元の超曲面環 R について CM(R) の次元の評価式を求めているが，本章の評価式が適用できる環のカテゴリーは彼らのものとは全く違う超曲面環とである。

第 5 章では，全反射加群圏の次元について調べたものである。射影加群の代わりに全反射加群代用することで新しいホモロジー代数の理論が展開される。この新しいホモロジー代数の世界では射影次元は G 次元と呼ばれる新しい普遍量が対応しており，CM(R) 加群圏の考察は全反射加群圏の考察に対応してくる。全反射加群圏の中では有限表現型ということは生じないので，この加群圏の分類する方法として圏の次元を用いることが有用な候補として挙げられる。得られた定理は圏の次元についての結果ではなく，次元と相似的な普遍量である圏の半径についての評価式となった。主定理を簡潔な述べ方で書く。S を正則局所環で $J, I_1,\dots,I_t$ は S のイデアル，剰余

環 S/J は深さが 2 以上で，包含 $I_1 \dots I_t \subset \mathrm{J} \subset I_1 \cap \dots \cap I_t$ を満たし，各 S/I_i は Gorenstein 環となると仮定する。S/I_i のクルル次元を d_i とおき，全反射加群圏 $\mathrm{G}(\mathrm{S}/I_i)$ の半径を r_i とおく。このとき，G(S/J) の半径 r(S/J) は

$$\mathrm{r}(\mathrm{S}/\mathrm{J}) \leq \sum_{i=1}^{t}(d_i + r_i) - 2$$

で与えられる。この評価式については，精度に関してはまだまだ改良の必要はあるものの，全反射加群圏の半径の評価としては初めて試みたものといえる。また対象となる環も適用範囲がかなり広い定理となっている。

５　論文の特質

三角圏の次元についてはある程度研究が進んでおり，三角圏の次元を通じて加群圏の次元が判明するような例は多くあるが，加群圏だけを考えてその次元を判定した例は数少なく，本論文の結果はその成功例の一つといえる。本論文での加群圏の次元の計算が成功に至るに有効となったアイデアとしては，因数分解 $f = f_1 \dots f_s$ に付随してできるフィルトレーション

$$0: f_1 \subset 0: f_1 f_2 \subset \cdots \subset 0: f_1 \dots f_s$$

を考えたところ，及び拡張された行列分解の理論といえる。これら 2 つのアイデアは他では見られなかったアイデアである。

６　論文の評価

本論文は，可換環の表現論と呼ばれる分野の研究内容である。これは環上の加群全体がなす構造から，環を分類しようというものであり，古典的な研究テーマである。有限表現型，無限表現型といった分類をより精密に行うための普遍量として加群圏の次元という概念が新たに創られた。しかしながら，加群圏の次元の研究は黎明期であり，基本的な性質もまだ解明されてないところが多い。そのような未開拓の研究分野に果敢に挑戦をして，結果を残すことができたことは高く評価できる点である。本論文で披露されている証明の中には，フィルトレーションを用いる手法や拡張された行列分解の理論が使われ，これらは他に見られない独創的なアイデアである。また，古典的な研究対象としての CM 加群圏を調べるだけでなく，全反射加群圏についても考察を広げ，一つの結果を導くに至った点も高く評価できる。

７　論文の判定

本学位請求論文は，理工学研究科において必要な研究指導を受けたうえ提出されたものであり，本学学位規程の手続きに従い，審査委員全員による所定の審査及び最終試験に合格したので，博士（理学）の学位を授与するに値するものと判定する。

以　上